Síkgeometria

1) Egy húrnégyszög három szögéről tudjuk, hogy mértékük aránya $7:6:8$.

a) Mekkorák a húrnégyszög szögei? (13 pont)

Matematika órán, miután minden diák megoldotta a feladatot, három tanuló a következőket állította:

Zsófi: A húrnégyszög minden szöge egész szám.

Peti: A húrnégyszögnek van derékszöge.

Kata: A húrnégyszög egyik szöge $110°$-nál is nagyobb.

b) A három tanuló állítása közül melyik igaz a feltételnek megfelelő húrnégyszögre? (3 pont)

2) Az *ABC* derékszögű háromszög *BC* befogójának hossza 18 cm, a *CA* befogójának hossza 6 cm.

a) Mekkorák a háromszög hegyesszögei? (3 pont)

A *BC* befogó egy *P* belső pontját összekötjük az *A* csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$.

b) Milyen hosszú a *PB* szakasz? (6 pont)

Állítsunk merőleges egyenest az *ABC* háromszög síkjára *C* pontban! A merőleges egyenes *D* pontjára teljesül, hogy *CD* 15 cm.

c) Mekkora az *ABCD* tetraéder térfogata? (4 pont)

3) Egy családnak olyan téglalap alakú telke van, melynek két szomszédos oldala 68 m, illetve 30 m hosszú. A telek egyik sarkánál úgy rögzítettek egy kerti locsoló berendezést, hogy a telek rövidebb oldalától 4 m-re, a vele szomszédos oldaltól 3 m-re legyen. A locsoló berendezés körbe forgó locsolófeje azt a részt öntözi, amely a rögzítés helyétől legalább 0,5 m-re, de legfeljebb 4 m-re van. A telek mekkora részét öntözi a locsoló berendezés, és ez hány százaléka a telek területének? (11 pont)

4) Az *ABC* háromszög körülírt körének sugara 26 cm, $BAC\sphericalangle = 60°$

a) Számítsa ki a *BC* oldal hosszát! (4 pont)

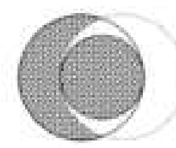
b) Hány fokos a háromszög másik két szöge, ha az *AC* oldal *b* cm, az *AB* oldal 3*b* cm hosszúságú? (12 pont)

A keresett értékeket egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

5) Klári teasüteményt készít. A meggyúrt tésztát olyan „téglatest" alakúra nyújtotta ki, amelynek a felülről látható lapja 30 cm × 60 cm méretű téglalap. Majd egy henger alakú szaggatóval (határoló körének sugara 3 cm) „körlapokat" vágott ki a tésztából.

Ezután a körlapocskákból először „holdacskákat" vágott le úgy, hogy a szaggató határoló körének középpontja a már kivágott körlap középpontjától 2 cm távolságra helyezte el, és így vágott bele a körlapba. (Minden bevágásnál csakis egy körlapot vágott ketté.)

Miután minden körlapból levágott egy „holdacskát", a körlapokból visszamaradt részek mindegyikéből -egy másik szaggatóval- kivágott egy-egy lehető legnagyobb körlap alakú süteményt.



a) Hány cm² területű egy „holdacska" felülről látható felülete? (Az eredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (11 pont)

Klári a „holdacskák" és a kis körlapok elkészítése után visszamaradt tésztát ismét összegyúrta, majd ugyanolyan vastagságúra nyújtotta ki, mint az első esetben, de most négyzet alakú lett a kinyújtott tészta.

b) Hány cm hosszú ennek a négyzetnek az oldala, ha Klári a 30 cm × 60 cm-es téglalapból eredetileg 50 darab 3 cm sugarú körlapot szaggatott ki? (Az eredmény egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)

6) Az ABC háromszögben $AB = 2$, $AC = 1$, a BC oldal hossza pedig megegyezik az A csúcsból induló súlyvonal hosszával.

a) Mekkora a BC oldal hossza? A hossz pontos értékét adja meg! (9 pont)

b) Mekkora a háromszög területe? A terület pontos értékét adja meg! (5 pont)

7) István örömmel mesélte Péter barátjának, hogy egy négyszög alakú telket vett, amire majd házat akar építeni. Elmondása szerint a négyszög egyik szöge derékszög, és az ezt közrefogó mindkét oldal 20,0 m hosszú. A telek másik két oldala is egymással egyenlő hosszú, ezek 120°-os szöget zárnak be.

a) Hány méter hosszú drót szükséges az üres telek körbekerítéséhez?(4 pont)

„Mekkora házat szeretnél rá építeni?" - kérdezte Péter.

„Négyzet alapú sarokházat, és körülbelül 100m² alapterületűt. Úgy gondoltuk a párommal, hogy a házat a derékszögű sarokba építjük." - válaszolt István.

„Ha jól képzelem el a telek alakját, akkor az nagyon furcsa alakú lehet. Oda még egy kis faház sem fér el." - szólt nevetve Péter.

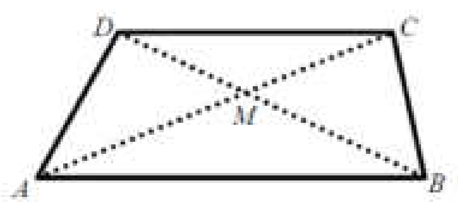
b) Rajzolja le, milyen alakú az István által megvett telek, és milyennek képzelte el Péter! (2 pont)

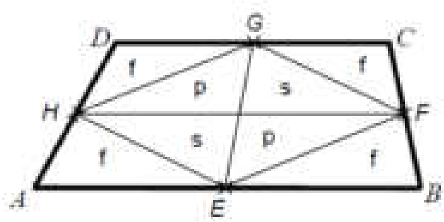
c) Legfeljebb mekkora alapterületű, négyzet alapú sarokház férne el a telek derékszögű sarkába az egyik és mekkora a másik esetben? (Válaszát m²-re kerekítve adja meg! (7 pont)

8) Egy 90 m² területű trapéz alakú virágágyás párhuzamos oldalainak aránya $AB : DC = 3 : 2$. Az ágyást tavasszal és ősszel is évszaknak megfelelő virágokkal ültetik be. Mindkét alkalommal mindegyik fajta virágból átlagosan 50 virágtövet ültetnek négyzetméterenként.

Tavasszal az átlókkal kijelölt négy háromszögre bontották a virágágyást. Az ABM háromszögbe sárga virágokat, a DMC háromszögbe fehéret, a maradék két részbe piros virágokat ültettek.

a) A tavaszi párosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek? (9 pont)





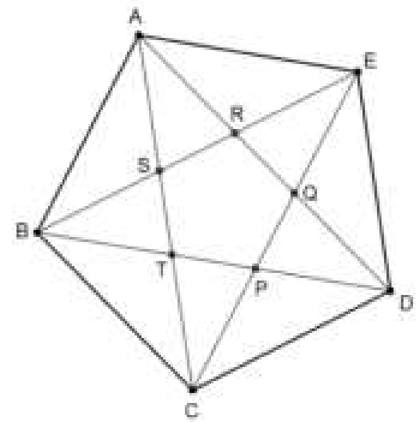
Ősszel a másik ábra szerint tervezték meg a virágok elhelyezését. (Az E, F, G, és H pontok a trapéz oldalainak felezőpontjai.) Ekkor is fehér (f), piros (p) és sárga (s) virágokat ültettek a tervrajz alapján.

b) Az őszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek? (7 pont)

Válaszait az alábbi táblázatban tüntesse fel!

	fehér	piros	sárga
tavasszal			
ősszel			

9) Megrajzoltuk az *ABCDE* szabályos sokszöget, és berajzoltuk minden átlóját. Az átlók metszéspontjait az ábra szerint betűztük meg: *P,Q,R,S,T.*



a) Hány olyan háromszög látható az ábrán, amelyek mindhárom csúcsa a megjelölt 10 pont közül való, és mindhárom oldalegyenese az *ABCDE* ötszög oldalegyenesei és átlóegyenesei közül kerül ki? (8 pont)

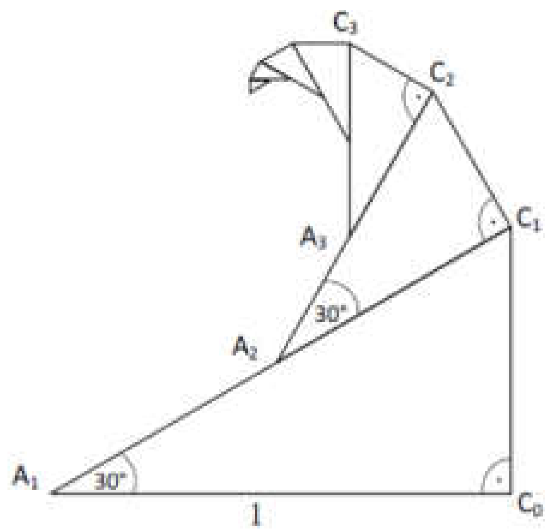
b) Tudjuk, hogy az *ABCQ* négyszög területe $120\ \text{cm}^2$. Mekkora az *ABCDE* ötszög területe? Válaszát egész értékekre kerekítve adja meg! (4 pont)

c) Tekintsük azt a tíz csúcsú gráfot, amelyet a megadott ábra szemléltet. Erről a gráfról fogalmaztunk meg két állítást. Állapítsa meg mindkét állításról, hogy igaz vagy hamis! Adjon rövid magyarázatot a válaszra!
1. állítás: Ennek a gráfnak 20 éle van.
2. állítás: Ebben a gráfban van olyan részgráf, amely nyolc élű kör. (4 pont)

10) Az $A_1C_0C_1$ derékszögű háromszögben az A_1 csúcsnál 30°-os szög van, az A_1C_0 befogó hossza 1, az A_1C_1 átfogó felezőpontja A_2.

Az A_2C_1 szakasz „fölé” az $A_1C_0C_1$ háromszöghöz hasonló $A_2C_1C_2$ derékszögű háromszöget rajzoljunk az ábra szerint. Az A_2C_2 átfogó felezőpontja A_3.

Az A_3C_2 szakasz „fölé” az $A_2C_1C_2$ háromszöghöz hasonló $A_3C_2C_3$ derékszögű háromszöget rajzolunk.



Ez az eljárás tovább folytatható.

a) Számítsa ki az így nyerhető végtelen sok derékszögű háromszög területének összegét (az összeg első tagja az $A_1C_0C_1$ háromszög területe.)! (7 pont)

b) Igazolja, hogy a $C_0C_1C_2...C_n$ töröttvonal hossza minden pozitív *n*-re kisebb, mint 1,4. (9 pont)

11) Az *ABC* háromszög oldalai $AB = 42, BC = 40, CA = 26$. Írjunk téglalapot a háromszögbe úgy, hogy a téglalap egyik oldala illeszkedjen a háromszög *AB* oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög *CA*, illetve *BC* oldalára essen. Tekintsük az így beírható téglalapok közül a legnagyobb területűt! Mekkorák ennek a téglalapnak az oldalai? (16 pont)

12)

a) A *KLMN* derékszögű trapéz alapjai $KL = 2\sqrt{12}$ és $MN = 3\sqrt{75}$ egység hosszúak, a derékszögű szár hossza $10\sqrt{2}$ egység. A trapézt megforgatjuk az alapokra merőleges *LM* szár egyenese körül. Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát! (π két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon, és az eredményt is így adja meg!) (4 pont)

b) Az $ABCD$ derékszögű érintőtrapéz AB és CD alapjai $(AB > CD)$ hosszának összege 20. A beírt körnek az alapokra nem merőleges AD szárral vett érintési pontja negyedeli az AD szárat.
Számítsa ki a trapéz oldalainak hosszát! (12 pont)

13) Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD és $AB > CD$. A trapéz átlóinak metszéspontja K. Az ABK háromszög AB oldalához tartozó magassága kétszerese a CDK háromszög CD oldalához tartozó magasságának. Jelölje T az ADK háromszög területét!
Hányszorosa az $ABCD$ trapéz területe T-nek? (16 pont)

14) Kartonpapírból kivágunk egy 1,5 dm magasságú ABC szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húzunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyikből ugyanakkora 0,5 deciméternél kisebb x távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei.

a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét x függvényében! (6 pont)

b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú x magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágjuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait. Mekkora x estén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális? (10 pont)

15) A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést!(7 pont)

Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el! (7 pont)

16) Az ábrán egy mosógép vázlatos rajza látható. A kisebb, 1 cm sugarú kerék a motor tengelyéhez kapcsolódik, és egy hajtószíj segítségével forgatja meg a mosógép dobjához rögzített, 20 cm sugarú kereket, amitől a dob és benne a ruhák forognak mosás közben. A két kerék tengelye párhuzamos, a tengelyek távolsága 46 cm. (A hajtószíj a tengelyekre merőleges síkban van.) Milyen hosszú a feszes hajtószíj? (13 pont)

17) Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belsőnégyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya $5:7$.

a) Milyen arányban osztja két részre a belső négyzet csúcsa a külső négyzet oldalát? Az arány pontos értékét adja meg! (10 pont)

A belső négyzetbe egy újabb, harmadik négyzetet rajzolunk úgy, hogy a harmadik és a második négyzet oldalainak aránya is $5:7$. Ezt az eljárást aztán gondolatban végtelen sokszor megismételjük.

b) Mekkora lesz a kapott négyzetek kerületeinek az összege, ha a kiindulási négyzet kerülete is tagja a (végtelen sok tagú) összegnek? (6 pont)

18) Egy 15°-os emelkedési szögű hegyoldalon álló függőleges fa egy adott időpontban a hegyoldal emelkedésének irányában 3 méter hosszú árnyékot vet. Ugyanebben az időpontban a közeli vízszintes fennsíkon álló turista árnyékának hossza éppen fele a turista magasságának. Hány méter magas a fa?
Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (12 pont)

19) Az *ABCDEF* szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$.

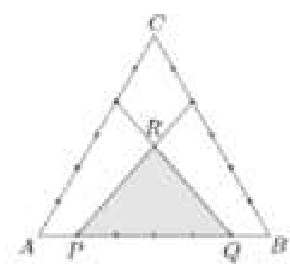
a) Számolja ki a hatszög területének pontos értékét! (6 pont)

b) Az *ABCDEF* hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1, a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2, és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot. Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1+t_2+...+t_n)$ határértékét! (Pontos értékkel számoljon!) (10 pont)

20) a) Egy téglalapot 720 darab egybevágó kis téglalapra daraboltunk szét. A kis téglalapok oldalai közül az egyik 1 cm-rel hosszabb, mint a másik. Hány cm hosszúak egy-egy kis téglalap oldalai, ha a nagy téglalap területe $2025\ \text{cm}^2$? (7 pont)

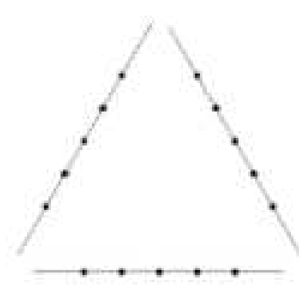
b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből összesen 720 olyan hatjegyű szám képezhető, melynek számjegyei között nincsenek egyenlők. Ezek között hány 12-vel osztható van? (5 pont)

21) Megadtunk három egyenest, és mindegyiken megadtunk öt-öt pontot az ábra szerint.



a) Hány olyan szakasz van, amelynek mindkét végpontja az ábrán megadott 15 pont valamelyike, de a szakasz nem tartalmaz további pontot a megadott 15 pont közül? (6 pont)

Az egyenlő oldalú *ABC* háromszög 18 egység hosszúságú oldalait hat-hat egyenlő részre osztottuk, és az ábra szerinti osztópontok összekötésével megrajzoltuk a *PQR* háromszöget.



b) Számítsa ki a *PQR* háromszög területének pontos értékét! (10 pont)

22) Egy televíziókészülék termékleírásában szereplő „16:9-es típus" azt adja meg, hogy mennyi a téglalap alakú tv-képernyő két szomszédos oldalhosszának aránya, a „40 colos" jellemző pedig a képernyő átlójának a hosszát adja meg col-ban $(1\ \text{col} \approx 2{,}54\ \text{cm})$.

a) Számítsa ki a 40 colos, 16:9-es képernyő oldalainak hosszát! Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

b) Két 16:9-es képernyő közül az elsőnek 69%-kal nagyobb a területe, mint a másodiknak. Hány százalékkal nagyobb az első képernyő átlója, mint a másodiké? (5 pont)

23) a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz! (6 pont)

b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig. (Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.)

c) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni? (Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha a, b, c, d pozitív számok, és $a+c=b+d$, akkor az a, b, c, d hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.) (7 pont)

24) A fénymásoló gépekhez is használt téglalap alakú papírlapok mindegyikének olyan a méretezése, hogy a hosszabb és a rövidebb oldal aránya (megközelítőleg) $\sqrt{2}$. Ezt a számot röviden a téglalap alakú papírlap *méretarányának* is nevezik.

a) Mutassa meg, hogy ha egy $\sqrt{2}$ méretarányú papírlapot félbevágunk úgy, hogy a vágási él merőleges a papírlap hosszabb oldalára, akkor az így keletkező két egybevágó papírlap ugyancsak $\sqrt{2}$ méretarányú lesz!(4 pont)

A szabványos papírlapok méretét egy nagybetűvel és a betű után írt természetes számmal jelölik (például A0, A1, B5). Az A0-s papírlap méretaránya $\sqrt{2}$, a területe pedig éppen 1 m^2.

b) Számítsa ki az A0-s papírlap oldalainak hosszát egész milliméterre kerekítve! (4 pont)

Ha az A0-s papírlapot hosszabb élére merőlegesen félbevágjuk, akkor két A1-es papírlapot kapunk. Az eljárást tovább folytatva kapjuk az A3-as, A4-es, A5-ös papírlapokat. A leggyakrabban használt irodai másolópapír A4-es méretű és „80 g-os". A „80 g-os" jelzés azt jelenti, hogy 1 m^2 területű másolópapír tömege 80 gramm.

c) Egy csomagban 500 darab A4-es „80 g-os" papírlap van. Hány kg egy ilyen csomag tömege, ha a csomagolóanyag tömege 20 g? (5 pont)

25) Egy kör középpontja egy derékszögű háromszög b hosszúságú befogójára illeszkedik. A kör érinti a c hosszúságú átfogót és az a hosszúságú befogó egyenesét is. Andrea és Petra egymástól függetlenül kifejezték a kör sugarának hosszát a háromszög oldalainak hosszával. Andrea szerint a kör sugara $R_A=\dfrac{ab}{a+c}$, Petra szerint pedig $R_P=\dfrac{ac-a^2}{b}$.

a) Igazolja, hogy $R_A=R_P$! (5 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy Andrea képlete helyes! (4 pont)

Egy derékszögű háromszög oldalai $a=8$ cm, $b=6$ cm és $c=10$ cm. Megrajzoltuk azt a két kört, melyek középpontja a háromszög egyik, illetve másik befogójára illeszkedik, és amelyek érintik a háromszög másik két oldalegyenesét.

c) Számítsuk ki, hogy a két körnek a háromszög belsejébe eső M metszéspontja milyen messze van a derékszögű C csúcstól! (5 pont)

26) a) A $PQRS$ húrnégyszöget a PR és a QS átlók megrajzolásával négy háromszögre bontottuk. Igazolja, hogy ezek közül a két-két szemközti háromszög hasonló egymáshoz! (4 pont)

Az $ABCD$ húrnégyszög AB oldala a négyszög körülírt körének egyik átmérője. A négyszög BC oldala 3 cm, a CD oldala 5 cm hosszú, továbbá $BCD\measuredangle = 120°$.

b) Számítsa ki a négyszög BD átlójának, AB oldalának és AD oldalának hosszát, valamint a négyszög többi szögét! (10 pont)

27) A Téglácska csokiszelet gyártója akciót indít: ha a szerencsés vásárló a csokiszelet csomagolásának belső oldalán a „Nyert” feliratot találja, akkor ezzel egy újabb szelet csokit nyert. A gyártó úgy reklámozza a termékét, hogy „minden ötödik csoki nyer”. (Ez úgy tekinthető, hogy minden egyes csoki 0,2 valószínűséggel nyer.)

a) Juli öt szelet csokoládét vásárol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az öt szelet csoki között legalább egy nyerő csoki lesz? (4 pont)

Pali is öt szelet csokoládét vásárolt, és végül hét szelet csokival tért haza a boltból, mert nyert még kettőt.

b) Vizsgálja meg, hogy az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége!

I. Ha valaki megvásárol öt szelet csokit, akkor azok között két nyerő csoki lesz, de a két nyereménycsoki egyike sem nyer.

II. Ha valaki megvásárol öt szelet csokit, akkor azok között egy nyerő csoki lesz, a nyereménycsoki nyer egy hetedik szelet csokit, de az már nem nyer. (7 pont)

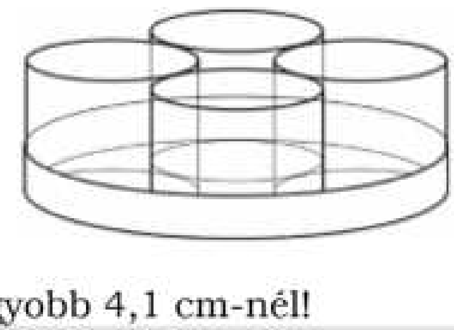
Egy másik akcióban a csokiszelet térfogatát 20%-kal megnövelték, de továbbra is változatlan áron adták. A csokiszelet téglatest alakú, az eredeti és a megnövelt szelet (matematikai értelemben) hasonló. Az akciós szelet 1 cm-rel hosszabb az eredeti csokiszeletnél.

c) Határozza meg az eredeti csokiszelet hosszúságát! Válaszát egész cm-re kerekítve adja meg! (5 pont)

28)

a) Az $ABCD$ négyzet körülírt körén felvettünk egy olyan P pontot, amelyik nem csúcsa a négyzetnek. Bizonyítsa be, hogy $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$. (4 pont)

Egy cég az általa forgalmazott poharakat négyesével csomagolja úgy, hogy a poharakhoz még egy tálcát is ad ajándékba. A 20 cm (belső) átmérőjű, felül nyitott forgáshenger alakú tálcára négy egyforma (szintén forgáshenger alakú) poharakat tesznek úgy, hogy azok szorosan illeszkednek egymáshoz és a tálca oldalfalához is.



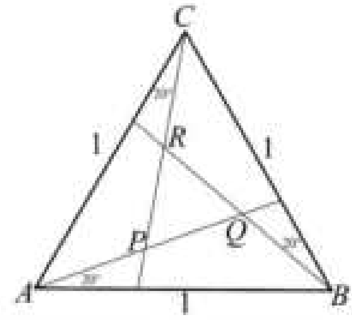
b) Igazolja, hogy a poharak alapkörének sugara nagyobb 4,1 cm-nél!

A pohár fala 2,5 mm vastag, belső magassága 11 cm. (5 pont)

c) Igaz-e, hogy a pohárba belefér 5 dl üdítő? (4 pont)

29) a) *Ha egy háromszög szabályos, akkor a körülírt körének középpontja megegyezik a beírt körének középpontjával.*
Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és igazolja, hogy a megfordított állítás is igaz! (4 pont)

Az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszög minden csúcsánál behúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így az ábrán látható PQR szabályos háromszöget kaptuk.



b) Számítsa ki a PQR háromszög oldalának hosszát! (7 pont)

A piros, kék, zöld és sárga színek közül három szín felhasználásával úgy színezzük ki az ábrán látható ABQ, BCQ, CQR, ACP és PQR háromszögek belsejét, hogy a közös határszakasszal rendelkező háromszögek különböző színűek legyenek. (Egy-egy háromszög színezéséhez csak egy-egy színt használunk.)

c) Összesen hány különböző színezés lehetséges? (5 pont)

30) Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 9 cm és 11 cm.

a) Igazolja, hogy a háromszög hegyesszögű! (5 pont)

Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja.

b) Igazolja, hogy a háromszög oldalainak aránya $3:4:5$. (5 pont)

c) Ennek a derékszögű háromszögnek a területe 121,5 cm². Számítsa ki a háromszög oldalainak hosszát! (3 pont)

31)

a) Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszát indokolja!
Van olyan G_1, illetve G_2 fagráf, amelyre igaz, hogy a G_2 csúcsainak száma kétszerese a G_1 csúcsai számának, és a G_2 éleinek száma is kétszerese a G_1 élei számának. (A fagráfnak van legalább egy csúcsa.) (3 pont)

Az A, B, C, D, E, F kereskedőcégek mindegyike mind az öt másik céggel kötött egy-egy üzletet az előző hónapban (bármelyik két cég között pontosan egy üzletkötés jött létre). Az ellenőrző hatóság véletlenszerűen kiválaszt a hat cég előző havi (egymás közötti) üzletkötései közül négyet, és azokat ellenőrzi.

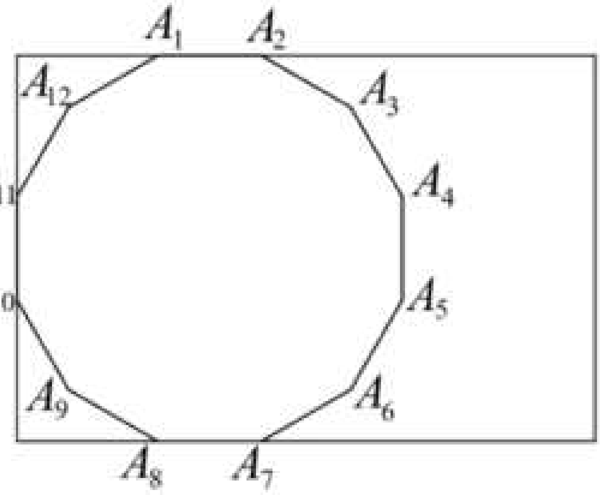
b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az A vagy a B cég üzletkötései közül is ellenőriznek legalább egyet? (6 pont)

Az egyik cég azzal bízott meg egy reklámügynökséget, hogy tervezzen egy nagy méretű, függőlegesen leomló hirdetővásznat a budapesti Lánchíd fő tartóláncának egy részére.

A híd két támpillérének PV távolsága kb. 200 méter. A fő tartólánc alakja jó közelítéssel egy olyan (függőleges síkú) parabolának az íve, amelynek a tengelypontja a PV felezőpontja (U), a tengelye pedig a PV felezőmerőlegese. A lánc tartópillérnél becsült legnagyobb magassága $PQ = 16$ méter, a vászon tervezett szélessége $PS = 50$ méter. A tervek szerint a QR íven felfüggesztett hirdetővászon az ábrán sötétített $PQRS$ területet fedi majd be (RS merőleges PS-re).

c) Hány m² területű vászon beszerzésére lesz szükség, ha a rögzítések miatt 8% veszteséggel számol a tervező? (7 pont)

32) Egy nagy méretű, köztéren felállítandó óra számlapját szabályos 12-szög alakúra tervezik. Az $A_1A_2...A_{12}$ számlapot egy $260\text{ cm}\times 180\text{ cm}$-es téglalap alakú alumíniumlemezből vágják ki az ábra szerint.



a) Mekkora tömegű az óralap, ha az alumíniumlemez vastagsága 2 mm, és 1 m^3 alumínium tömege 2700 kg?(7 pont)

b) Jelöljük meg a szabályos tizenkétszög A_1 csúcsát! Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik csúcsa az A_1, a másik két csúcsa pedig szintén a tizenkétszög valamelyik két csúcsával azonos? (Két háromszöget akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább az egyik csúcsuk különböző.) (5 pont)

33) a) Határozza meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszait indokolja!

I. Ha egy trapéznak 2-2 szöge egyenlő, akkor a trapéz húrtrapéz.

II. Ha egy háromszögben $a = b$, akkor $\sin 3\alpha = \sin 3\beta$.

(A háromszög oldalai *a*, *b* és *c*, a velük szemközti szögek rendre α, β és γ.) (6 pont)

b) Fogalmazza meg a II. állítás megfordítását, és a megfordított állításról is döntse el, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (4 pont)

Egy matematika-vizsgafeladatban három állítás logikai értékét kell meghatározni (igaz vagy hamis). Három helyes válasz esetén 2, két helyes válasz esetén 1, kettőnél kevesebb helyes válasz esetén 0 pontot kap a vizsgázó. Béla tanult egy keveset, de bizonytalan a tudása: mindegyik kérdésnél 0,6 valószínűséggel találja el a helyes választ.

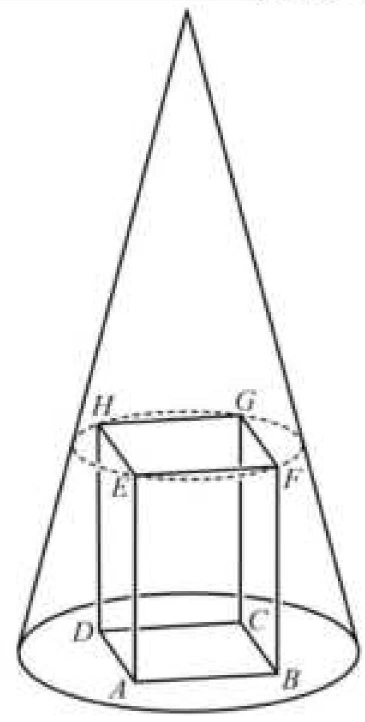
c) Számítsa ki annak a négy eseménynek a valószínűségét, hogy Béla sikeres tippjeinek száma 3, 2, 1, illetve 0, és határozza meg Béla pontszámának várható értékét! (6 pont)

34) Az *ABCDEFGH* négyzetes oszlop *AE*, *BF*, *CG*, *DH* élei merőlegesek az *ABCD* alaplapra. Az *A* csúcsból kiinduló három él hossza $AB = AD = 8$ egység, $AE = 15$ egység.

a) Számítsa ki az $\overrightarrow{EF}$ és $\overrightarrow{AH}$ vektorok skaláris szorzatát! (3 pont)

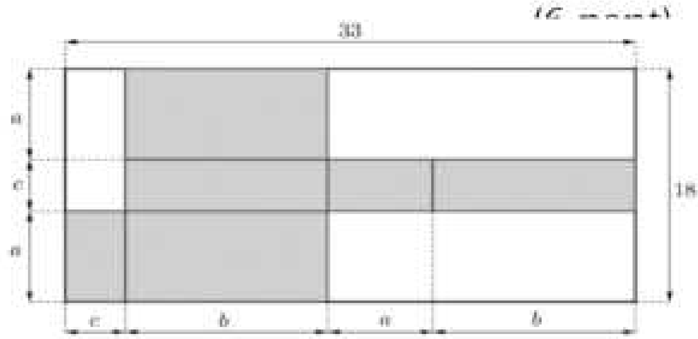
A négyzetes oszlop köré egy *P* csúcspontú forgáskúpot illesztünk úgy, hogy az *A*, *B*, *C*, *D* csúcsok a kúp alaplapjára, az *E*, *F*, *G*, *H* csúcsok pedig a kúp palástjára illeszkedjenek. (A kúp és a négyzetes oszlop tengelye egybeesik.) A kúp magassága 45 egység.

b) Számítsa ki a kúp felszínét! (7 pont)



c) Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik befogója 15 egység hosszú, és a másik két oldala is egész szám hosszúságú? (Az egybevágó háromszögeket nem tekintjük különbözőknek.) (6 pont)

35) Egy 33×18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre szinezett) kiterített hálóját és méreteit az *ábra* szerint választják meg.



a) Határozza meg a doboz térfogatát, ha $a = 7$ cm! (3 pont)

b) Hogyan kell megválasztani az a, b, c, élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen? (9 pont)

Egy téglatest bármely három csúcsa egy háromszöget határoz meg.

c) A téglatest csúcsai által meghatározott háromszögek között hány olyan van amelynek a síkja nem esik egybe a téglatest egyik lapjának síkjával sem? (4 pont)

36) Egy egyenlő szárú háromszög oldalai hosszúságának átlaga 10, szórása $3\sqrt{2}$.

a) Határozza meg a háromszög oldalainak a hosszát! (6 pont)

Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(-6;0)$, $B(6;0)$, és $C(0;8)$.

b) Igazolja, hogy a $3x - 4y = -12$ egyenletű e egyenes felezi az ABC háromszög kerületét és területét is! (10 pont)

37)

a) Döntse el, hogy igaz-e a következő állítás! Válaszát indokolja! (4 pont)
Ha egy háromszög két magassága egyenlő hosszúságú, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$, $b = \sqrt{27}$ és $\beta = 2\alpha$.

b) Számítsa ki a háromszög szögeit! (5 pont)

Az egységnyi oldalú, szabályos ABC háromszögbe olyan $PQRS$ téglalapot írunk, melynek PQ oldala az AB oldalra illeszkedik, R a BC oldal pontja, S pedig a CA oldalé.

c) Határozza meg a $PQRS$ téglalap területének maximális értékét! (7 pont)

38) Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB = 20$, $BC = 18$, $ABC_\sphericalangle = 70°$, $CAD_\sphericalangle = 50°$.

a) Milyen hosszú a CD oldal, és mekkora a húrnégyszög területe? (7 pont)

A derékszögű koordináta-rendszerben adottak a $P(-2;0)$, $Q(6;0)$ és $R(0;5)$ pontok, a H pedig a PQ szakasz tetszőleges pontja.

b) Számítsa ki a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzatát, ha $H(-1,8;0)$ (2 pont)

c) Adja meg a H pont koordinátáit úgy, hogy a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzata maximális, illetve úgy is, hogy minimális legyen! (7 pont)

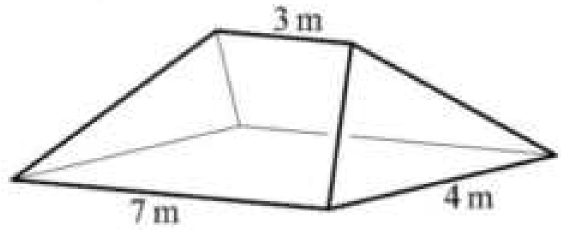
39) Ádám balatoni telkén áll egy kis hétvégi ház. A ház felülnézete egy $7\text{ m} \times 4\text{ m}$-es téglalap. Ha esik az eső, akkor a tetőre lehulló csapadékot a tető négy oldalán körbefutó ereszcsatornák gyűjtik össze és vezetik be négy nagy,

kezdetben üres (fedett) hordóba. A hordók forgáshenger alakúak, belső átmérőjük 40 cm, magasságuk 90 cm.

Egy nyári zivatar alkalmával 15 mm csapadék hullott a településen (ez azt jelenti, hogy minden vízszintes felületen 15 mm magasan állna az esővíz, ha nem szivárogna el.) A zivatar közben a tetőre lehullott csapadék 95%-a összegyűlt a hordókban.

a) A zivatar után mindegyik hordóban ugyanolyan magasan állt a víz. Mekkora ez a magasság? (5 pont)

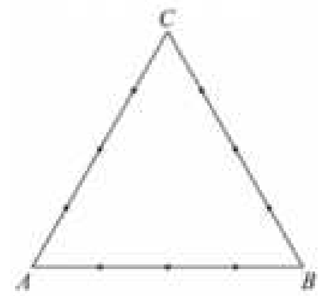
A ház cseréptteteje elöregedett, cserélni kell. A tető felülete négy síkidomból áll. A háztető 7 méteres oldalaihoz két egybevágó húrtrapéz csatlakozik, amelyek síkja a vízszintessel egyaránt 30 fokos szöget zár be. A trapézok egymáshoz csatlakozó, rövidebb oldala 3 méter hosszú. A háztető 4 méteres oldalaihoz két egybevágó, egyenlő szárú háromszög csatlakozik.



b) Hány darab cserepet kell vásárolnia Ádámnak a tető újracserepezéséhez, ha a tetőfelület egy négyzetméterére 30 darabra van szükség, és a megvásárolt mennyiség 8%-a hulladék lesz?

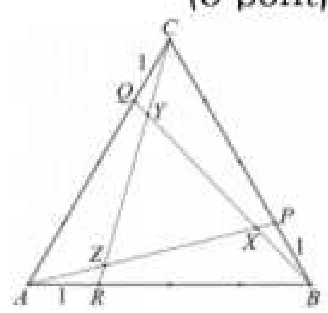
(11 pont)

40) Az ABC szabályos háromszög mindhárom oldalát 3-3 osztóponttal négy egyenlő részre osztottuk.



a) Hány olyan négyszög van, melynek mind a négy csúcsa a háromszög oldalain kijelölt 9 pont közül való úgy, hogy a négyszögnek a háromszög mindegyik oldalán van legalább egy csúcsa?
(Két négyszöget különbözőnek tekintünk, ha legalább egy csúcsukban különböznek.) (5 pont)

Jelölje a 4 egység oldalú ABC szabályos háromszög BC oldalának B-hez közelebbi negyedelőpontját P, a CA oldal C-hez közelebbi negyedelőpontját Q, az AB oldal A-hoz közelebbi negyedelőpontját pedig R. Jelölje továbbá AP és BQ szakaszok metszéspontját X, BQ és CR szakaszok metszéspontját Y, végül CR és AP szakaszok metszéspontját Z.



b) Határozza meg az XYZ háromszög területét! (11 pont)

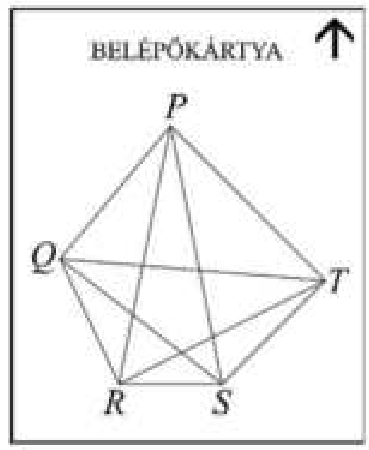
41) Az $ABCD$ konvex négyszögben $AB = 50$ m, $BC = 60$ m, $CD = 70$ m, továbbá $BAD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 100{,}3°$.

a) Számítsd ki a négyszög területét! (9 pont)

Az $ABCD$ konvex négyszöget az átlói négy háromszögre bontják. Ezeket pirosra, kékre, sárgára vagy zöldre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos háromszög különböző színű legyen, de az egymással szemben fekvők azonos színűek is lehetnek. (Két háromszög szomszédos, ha van közös oldaluk.)

b) Hány olyan különböző színezés lehetséges, amelyhez pontosan 3 színt használunk? (6 pont)

42) Egy többnapos nemzetközi matematikakonferencia minden résztvevője belépőkártyát kap, amelyen a $PQRST$ konvex ötszög és annak átlói láthatók. A szervezők úgy tervezik, hogy egy-egy belépőkártyán az ötszög oldalai és átlói közül valahányat (egyet vagy többet, akár az összeset, de az is lehet, hogy egyet sem) megvastagítanak, így a különböző személyek különböző ábrájú kártyát kapnak. Az elektronikus kapu optikai leolvasója ez alapján engedélyezi a belépést, és elvégzi a személy regisztrációját. (Két belépőkártya különböző, ha az egyiken szerepel olyan megvastagított szakasz, amelyik a másikon nem.) A konferenciának 400 résztvevője lesz.



a) Jut-e mindenkinek különböző belépőkártya? (3 pont)

A konferencia épülete egy háromszög alakú területen van. Ha a háromszög csúcsai A, B és C, akkor $AB = AC = 130$ méter, és $BC = 100$ méter. A háromszög alakú területet kettéosztja az egyenes CD kerítés úgy, hogy a BCD háromszög alakú rész területe $200\ \text{m}^2$. (D az AB oldalon van.)

b) Milyen hosszú a CD kerítés? (7 pont)

A konferencián 200 magyar, 70 angol és 130 német matematikus vesz részt. Az angolok életkorának átlaga 44 év, a németeké 48 év, az összes résztvevő életkorának átlaga 45,7 év.

c) Mennyi a magyar résztvevők életkorának átlaga? (4 pont)

43) Az ókori egyiptomiak az egyenlő szárú háromszög területét (közelítő módszerrel) úgy számolták ki, hogy az alap és a szár szorzatának a felét vették.

a) Egy egyenlő szárú háromszög alapja 18 cm hosszú. Mekkora lehet a szára, ha az ókori egyiptomiak módszere e háromszög valódi területét 25%-nál kisebb hibával adja meg? (9 pont)

Az ókori Egyiptom matematikájában a számok négyzetének is jelentős szerep jutott.

b) Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amellyel az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ számot megszorozva négyzetszámot kapunk? (7 pont)